系所：　<u>數學系 (選考丙)、</u>　　　　　　　　　　　科目：　<u>微積分</u>
　　　　<u>統計資訊研究所(選考丙)</u>

1. Find the following limits:　(24 points, 8 points each)

   (1)　$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x^2\right)^{1/x^2}$　　　(2)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}$　　　(3)　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\ln x\right)^{100}}{x^{1/100}}$.

2. Sketch the graph of the function　$y = 1 + 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$, and indicate its local maxima, minima and inflection points.　(16 points)

3. Use Taylor Theorem to prove that　$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!}$,

   for all　$x \in \left(0, \pi\right)$.　(10 points)

4. Evaluate the following integrals:　(24 points, 8 points each)

   (1)　$\displaystyle\int_0^4 x^2 \ln x \, dx$　　　(2)　$\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt{16-x^2}} \, dx$　　　(3)　$\displaystyle\int_0^8 \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \, dx$.

5. Evaluate the double integral　$\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2} \, dA$, where　R　is the region enclosed by the lines　$x - y = 0$,　$x - y = 2$,　$x + y = 0$, and　$x + y = 3$.　(16 points)

6. Show that the improper integral　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\ln x - x} \, dx$ converges.　(10 points)

系所：　<u>數學系 (選考丙)、</u>
　　　　<u>統計資訊研究所(選考丙)</u>